Enseignant : Mathieu Huruguen
Algèbre Linéaire - CMS
11 avril 2025
Durée : 105 minutes

X

Contrôle 3 (Corrigé)

SCIPER : **XXXXXX**

Signature

Absent.e

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 9 questions et 8 pages, les dernières pouvant être vides. Le total est de 30 points. Ne pas dégrafer.

- Posez votre **carte d'étudiant.e** sur la table, **vérifiez** votre nom et votre numéro SCIPER sur la première page et apposez votre **signature**.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix unique**, on comptera :
  les points indiqués si la réponse est correcte,
  0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  0 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Si une question est erronée, les enseignant·es se réservent le droit de l'annuler.
- Les dessins peuvent être faits au crayon.
- Répondez dans l'espace prévu (**aucune** feuille supplémentaire ne sera fournie).
- Les brouillons ne sont pas à rendre: ils ne seront pas corrigés.

Respectez les consignes suivantes | Observe this guidelines | Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien

choisir une réponse | select an answer
Antwort auswählen

ne PAS choisir une réponse | NOT select an answer
NICHT Antwort auswählen

Corriger une réponse | Correct an answer
Antwort korrigieren

ce qu'il ne faut **PAS** faire | what should **NOT** be done | was man **NICHT** tun sollte

Première partie, questions à choix unique

Pour chaque question, marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n’y a qu’**une seule** réponse correcte par question.

Pour les **Questions 1, 2 et 3** on donne la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Question 1 (1 point) Combien vaut le déterminant de A ?

☐ -4 ☐ 1 ☐ 4 ☐ 0
■ 2 ☐ $-\frac{1}{2}$ ☐ -2 ☐ -1

Question 2 (2 points) Quel est le coefficient sur la troisième ligne et la deuxième colonne de la matrice A^{-1} ?

☐ 11 ☐ -1 ☐ $-\frac{5}{2}$ ☐ 3
☐ 1 ■ $\frac{11}{2}$ ☐ $\frac{3}{2}$ ☐ -3

Question 3 (1 point) Quel est le coefficient sur la première ligne et la première colonne de la matrice $A^2 - 6A$?

☐ 7 ☐ 1 ■ 11 ☐ -1
☐ 36 ☐ -3 ☐ 5 ☐ 4

Pour les **Questions 4, 5 et 6** on donne deux bases de $\mathbb{R}^3$ de la forme suivante :

$$\mathcal{B} = v_1, v_2, v_3 \quad \text{et} \quad \mathcal{B}' = \frac{1}{3}v_2, -v_3, v_1 + 2v_3$$

ainsi qu'une application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vérifiant :

$$[f]_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 6 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Question 4 (2 points) Quel est le coefficient sur la troisième ligne et la première colonne de la matrice $[f]_{\mathcal{B}}$?

- [ ] $\frac{2}{3}$
- [x] -1
- [ ] 0
- [ ] 2
- [ ] -3
- [ ] $-\frac{3}{2}$
- [ ] -2
- [ ] 1

Correction : Il faut trouver le coefficient de v_3 dans la décomposition de $f(v_1)$ sur $\mathcal{B}$. Or :

$$f(v_1) = 3(-v_3) + 1(v_1 + 2v_3) = v_1 - v_3 .$$

Question 5 (2 points) Quel est le coefficient sur la première ligne et la troisième colonne de la matrice $[f]_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$?

- [x] 3
- [ ] $\frac{2}{9}$
- [ ] 2
- [ ] -1
- [ ] 4
- [ ] $\frac{1}{3}$
- [ ] 0
- [ ] -2

Correction : Il faut trouver le coefficient de v_1 dans la décomposition de $f(v_1 + 2v_3)$ sur $\mathcal{B}$. Or :

$$f(v_1 + 2v_3) = f(v_1) + 2f(v_3) = (v_1 - v_3) + 2(v_1 + 2v_2 + 2v_3) = 3v_1 + 4v_2 + 3v_3 .$$

Question 6 (2 points) On suppose que $\mathcal{B}'$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Parmi les vecteurs suivants de $\mathbb{R}^3$, lequel appartient à $\mathrm{Ker}\, f$?

- [ ] $(3, 1, -1)$
- [ ] $(-9, 3, 1)$
- [ ] $(1, 3, -1)$
- [ ] $(-1, 9, 3)$
- [ ] $(9, 1, 1)$
- [ ] $(1, 3, 1)$
- [ ] $(1, -3, 9)$
- [x] $(9, 3, 1)$

Correction : Le fait que $\mathcal{B}'$ soit la base canonique permet de trouver :

$$v_1 = (0, 2, 1)\,,\ v_2 = (3, 0, 0)\,,\ v_3 = (0, -1, 0)\,.$$

Ensuite, de l'égalité matricielle :

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 6 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

on déduit que le vecteur suivant est dans le noyau de f :

$$v_1 + 3v_2 - v_3 = (9, 3, 1)\,.$$

Deuxième partie, 1 question de type ouvert

Répondre dans l'espace dédié. Votre réponse doit être soigneusement justifiée, toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse. Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées au correcteur.

Question 7: *Cette question est notée sur 6 points.*

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6

Dans cette question, on ne demande que les réponses finales, sans développement. Aucune justification ne sera prise en compte.

Dans chacun des cas ci-dessous, déterminer **un exemple** de base :

$$\mathcal{B} = v_1, v_2, v_3$$

de $\mathbb{R}^3$ vérifiant la propriété donnée. Les sous-questions (a), (b), (c) sont **indépendantes**.

(a) Le plan vectoriel $\mathrm{Vect}(v_1, v_3)$ a pour équation $2x + 3y - 4z = 0$.

Solution. Il suffit de prendre pour v_1 et v_3 deux solutions non proportionnelles de l'équation et pour v_2 un triplet non solution de l'équation.
Par exemple :

$$\boxed{v_1 = (3, -2, 0)\,,\ v_2 = (1, 0, 0)\,,\ v_3 = (2, 0, 1)}$$

(b) Le vecteur $(3, 1, 7)$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}$.

Solution. Il suffit de choisir trois vecteurs indépendants vérifiant la relation :

$$v_1 - v_2 + 2v_3 = (3, 1, 7)\,.$$

Par exemple :

$$\boxed{v_1 = (3, 2, 5)\,,\ v_2 = (0, 1, 0)\,,\ v_3 = (0, 0, 1)}$$

(c) On a ($\mathcal{B}_{\mathrm{can}}$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^3$) :

$$[\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}]_{\mathcal{B}_{\mathrm{can}}, \mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Solution. Si P désigne la matrice de passage de $\mathcal{B}_{\mathrm{can}}$ à $\mathcal{B}$ on doit donc avoir :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ou encore} \quad P = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 4 & 10 \end{pmatrix}$$

Il n'y a donc qu'une seule base solution, à savoir :

$$\boxed{v_1 = (0, 0, -1)\,,\ v_2 = (0, 1, 4)\,,\ v_3 = (-1, 3, 10)}$$

Question 8: *Cette question est notée sur 9 points.*

0 .5 1 .5 2 .5 3 .5 4 .5 5 6 .5 7 .5 8 .5 9

On donne, en fonction de $\alpha \in \mathbb{R}$, l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ décrite par :

$$f(x, y, z) = ((\alpha - 6)x + 2y + (2\alpha - 2)z, 3x - y + z, (\alpha^2 - 9)x + 3y + (2\alpha^2 - 3)z)$$

On rappelle que les réponses doivent être **soigneusement justifiées**.

(a) Calculer le déterminant de f, en fonction de la valeur du paramètre α.

(b) En discutant selon la valeur de α, déterminer le rang de f.

(c) Déterminer une (ou des) équation(s) de $\mathrm{Im}\, f$. On discutera selon la valeur de α.

(d) Décrire précisément, en fonction de α, l'ensemble :

$$f^{-1}(\{(4 - \alpha, -2 + 3\alpha, 6 + \alpha)\})\,.$$

Solution Notons A la matrice de f en base canonique :

$$A = \begin{pmatrix} \alpha - 6 & 2 & 2\alpha - 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ \alpha^2 - 9 & 3 & 2\alpha^2 - 3 \end{pmatrix}\,.$$

(a) Appliquons les opérations $L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2$ et $L_3 \leftarrow L_3 + 3L_2$ et développons par rapport à la deuxième colonne. On trouve :

$$\begin{vmatrix} \alpha - 6 & 2 & 2\alpha - 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ \alpha^2 - 9 & 3 & 2\alpha^2 - 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & 0 & 2\alpha \\ 3 & -1 & 1 \\ \alpha^2 & 0 & 2\alpha^2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} \alpha & 2\alpha \\ \alpha^2 & 2\alpha^2 \end{vmatrix} = -(2\alpha^3 - 2\alpha^3)\,.$$

Conclusion :

$$\boxed{\forall \alpha \in \mathbb{R}\,,\ \det f = 0}$$

(b) Il est clair que f n'est pas l'application nulle. Par ailleurs, d'après (a), le rang de f n'est pas égal à 3. On sait donc déjà que :

$$\mathrm{rg}\, f \in \{1, 2\}\,.$$

f est de rang 1 si et seulement si on a les relations de proportionnalité suivantes :

$$L_1 = -2L_2 \ \text{ et } \ L_3 = -3L_2\,.$$

Autrement dit, si et seulement si :

$$A = \begin{pmatrix} -6 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \\ -9 & 3 & -3 \end{pmatrix}\,.$$

Comme ceci se produit exactement quand $\alpha = 0$, on peut maintenant conclure :

$$\boxed{\mathrm{rg}\, f = \begin{cases} 1 \text{ si } \alpha = 0 \\ 2 \text{ si } \alpha \neq 0 \end{cases}}$$

(c) Si $\alpha = 0$, alors $\mathbf{Im}\, f$ est la droite vectorielle engendrée par $(2, -1, 3)$, qui a pour équations:

$$\boxed{\text{Pour } \alpha = 0 \text{ on a } \mathbf{Im}\, f : \tfrac{x}{2} = -y = \tfrac{z}{3}}$$

Si $\alpha \neq 0$, alors la décomposition colonne-ligne :

$$A = \begin{pmatrix} -6 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \\ -9 & 3 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 2\alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ \alpha^2 & 0 & 2\alpha^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 2\alpha \end{pmatrix}$$

montre que le plan vectoriel $\mathbf{Im}\, f$ admet pour équation :

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & x \\ -1 & 0 & y \\ 3 & \alpha & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 3 & \alpha \end{vmatrix} x - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & \alpha \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} z = 0\,.$$

Conclusion :

$$\boxed{\forall \alpha \in \mathbb{R}^*\,,\ \mathbf{Im}\, f : \alpha x + (2\alpha - 3)y - z = 0}$$

(d) Supposons d'abord que $\alpha = 0$. Dans ce cas, il faut décrire l'ensemble des antécédents de $(4, -2, 6)$. Ce triplet appartient à $\mathbf{Im}\, f$ car il satisfait les équations trouvées au (c) :

$$\frac{4}{2} = -(-2) = \frac{6}{2} = 2\,.$$

L'ensemble à décrire est donc non vide, il s'agit des solutions du système :

$$\begin{cases} -6x + 2y - 2z = 4 \\ 3x - y + z = -2 \\ -9x + 3y - 3z = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \quad 3x - y + z = -2\,.$$

C'est un plan, obtenu en translatant le noyau de f par exemple par $(0, 2, 0)$:

$$\boxed{\text{Pour } \alpha = 0 \text{ on a } f^{-1}(\{(4, -2, 6)\}) = (0, 2, 0) + \underbrace{\mathbf{Ker}\, f}_{\text{plan vectoriel d'équation } 3x - y + z = 0}}$$

Supposons maintenant que $\alpha \neq 0$. L'ensemble à décrire est non vide si et seulement si le triplet proposé vérifie l'équation trouvée au (c), c'est-à-dire si et seulement si :

$$\alpha(4 - \alpha) + (2\alpha - 3)(-2 + 3\alpha) - (6 + \alpha) = 5\alpha^2 - 10\alpha = 0$$

On a donc :

$$\boxed{\forall \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}\,,\ f^{-1}(\{(4 - \alpha, -2 + 3\alpha, 6 + \alpha)\}) = \varnothing}$$

Pour $\alpha = 2$, on a :

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ -5 & 3 & 5 \end{pmatrix},$$

si bien que l'ensemble à décrire est l'ensemble des solutions du système :

$$\begin{cases} -4x + 2y + 2z = 2 \\ 3x - y + z = 4 \\ -5x + 3y + 5z = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 4z = 10 \\ 3x - y + z = 4 \\ 4x + 8z = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 - 2z \\ y = 11 - 5z \end{cases}$$

C'est une droite, obtenue en translatant le noyau de f par exemple par $(5, 11, 0)$:

$$\boxed{\text{Pour } \alpha = 2 \text{ on a } f^{-1}(\{(2, 4, 8)\}) = (5, 11, 0) + \underbrace{\mathbf{Ker}\, f}_{\text{droite vectorielle engendrée par } (-2, -5, 1)}}$$

Question 9: *Cette question est notée sur 5 points.*

☐ .5 ☐ .5 ☐ .5 ☐ .5 ☐ .5
■ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5

On donne l'application linéaire :

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\,,\ (x, y, z) \to (3x + y + 5z, x - 3y + 5z, x - y + 3z)$$

dont on note A la matrice en base canonique.

(a) Déterminer le rang de f.

(b) Trouver une décomposition colonne-ligne minimale de A.

(c) Déterminer une application linéaire $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ telle que :

$$\operatorname{rg} g = 1 \quad \text{et} \quad \operatorname{Im}(f + g) = \operatorname{Vect}((0, 5, 2))\,.$$

Solution Notons A la matrice de f en base canonique :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 1 & -3 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}\,.$$

(a) Il n'y a pas de relation de proportionnalité entre les lignes/colonnes de la matrice A : elle est donc de rang supérieur ou égal à 2. Par ailleurs son déterminant est nul :

$$\det A = \begin{vmatrix} 0 & 10 & -10 \\ 1 & -3 & 5 \\ 0 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 10 & -10 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 0\,.$$

On peut conclure :

$$\boxed{\operatorname{rg} f = 2}$$

(b) Faisons apparaitre A comme somme de deux matrices de rang 1 :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -9 & 15 \\ 1 & -3 & 5 \\ 1 & -3 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 10 & -10 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

ce qui donne :

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}}$$

Etant de longueur 2, cette décomposition est minimale.

Remarque : l'étude des relations entre les colonnes ou entre les lignes de A donne par exemple :

$$C_3 = 2C_1 - C_2 \quad \text{ou} \quad L_1 = 5L_3 - 2L_2$$

et on peut exploiter ces relations pour écrire des décompositions minimales de A.

(c) La matrice B de l'application linéaire g recherchée doit être de rang 1 et vérifier :

$$A + B = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \star & \star & \star \end{pmatrix}\,.$$

En passant $\boldsymbol{B}$ de l'autre côté, on obtient une décomposition colonne-ligne minimale de $\boldsymbol{A}$:

$$\boldsymbol{A} = -\boldsymbol{B} + \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \star & \star & \star \end{pmatrix} .$$

où la deuxième matrice a sa première ligne nulle. Pour créer une telle décomposition, on sait alors que l'on peut choisir un pivot dans la première ligne de $\boldsymbol{A}$ et "compléter" en une matrice de rang 1. Par exemple :

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 1 & -3 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ -9 & -3 & -15 \\ -3 & -1 & -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & 20 \\ 4 & 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} .$$

Ceci amène à poser :

$$\boxed{\boldsymbol{B} = -\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -1 & -5 \\ 9 & 3 & 15 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} .}$$

Une autre méthode consiste par exemple à partir de la décomposition colonne-ligne trouvée au (b) et chercher à faire apparaitre la colonne :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

On trouve :

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\frac{5}{3}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{5}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} ,$$

ce qui amène à poser :

$$\boldsymbol{B} = -\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{5}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -1 & -5 \\ -1 & -\frac{1}{3} & -\frac{5}{3} \\ -1 & -\frac{1}{3} & -\frac{5}{3} \end{pmatrix} .$$